Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nach Lebesgue 2

Funktionen beschränkter Variation

Manuel Hinz

22.06.2022

Definition 1. *Eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt von **beschränkter Variation (v.b.V.) auf** $[a, b]$, wenn ein $M > 0$ existiert, s.d. für jede Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a, b]$ stets Folgendes gilt:*

$$V(g, Z) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq M$$

Sei

$$V_a^b(g) \coloneqq \sup_{Z \text{ Zerlegung von } [a,b]} V(g, Z)$$

*die **Totalvariation von** g **auf** $[a, b]$ und außerdem $\boldsymbol{BV}[a, b]$ die Menge der Funktionen von beschränkter Variation auf $[a, b]$.*

Satz 2. *$BV[a, b]$ ist eine Unteralgebra von der Menge der beschränkten Funktionen $B[a, b]$ und für $\forall f, g \in BV[a, b]$ gilt:*

1. $\|f\|_\infty \leq |f(a)| + V_a^b(f)$
2. $V_a^b(f + g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$
3. $V_a^b(f \cdot g) \leq \|f\|_\infty V_a^b(g) + \|g\|_\infty V_a^b(f)$

Beweis. Sei $x \in [a, b]$. Per Definition gilt $f(a) - f(x) \leq V_a^b(f)$. Da außerdem $|f(x)| - |f(a)| \leq |f(a) - f(x)|$ gilt, folgt $|f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b(f)$ und damit $\mathrm{BV}[a, b] \subset B[a, b]$.
Aus der Linearität folgt, dass außerdem $\forall c \in \mathbb{R} : c \cdot f \in \mathrm{BV}[a, b]$ und $V_a^b(c \cdot g) = |c| V_a^b(g)$.
Sei $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ eine beliebige Zerlegung des Intervals. Dann gilt folgende Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{n} |(f+g)(x_k) - (f+g)(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$
$$\leq V_a^b(f) + V_a^b(g) \implies f + g \in \mathrm{BV}[a, b]$$

Diese Rechnung zeigt insb. auch (2.).
Betrachten wir nun das Produkt fg zweier Funktionen von beschränkter Variation:

$$|f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| = |f(x_k)g(x_k) \underbrace{-f(x_k)g(x_{k-1}) + f(x_k)g(x_{k-1})}_{=0} - f(x_{k-1})g(x_{k-1})|$$

$|f(x_k)|\cdot|g(x_k)-g(x_{k-1})|+|g(x_{k-1})|\cdot|f(x_k)-f(x_{k-1})| \leq \|f\|_\infty|g(x_k)-g(x_{k-1})|+\|g\|_\infty|f(x_k)-f(x_{k-1})|$

Es folgt

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \leq \|f\|_\infty(g(x_k)-g(x_{k-1}))+\|g\|_\infty(f(x_k)-f(x_{k-1})).$$

Daher folgt (3.) und $fg \in \mathrm{BV}[a,b]$. □

Bemerkung. *Aus dem obigen Beweis folgt, dass $\|f\|_{BV} \coloneqq V_a^b f$ eine Halbnorm auf BV ist. Insb. ist es eine Norm auf $\{f \in BV[a,b] : f(a)=0\}$, da nun $\|\cdot\|_{BV}$ auch die Definitheit erfüllt.*

Beispiele auf $[0,1]$

Beispiel. *Polynome sind in $BV[0,1]$*

Beispiel.

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 0 & x=0 \\ x\sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \end{cases}$$

ist nicht in $BV[0,1]$.

Satz 3.
1. *$\mathcal{T}[a,b] \subset BV[a,b]$*
2. *Jede monotone Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist in $BV[a,b]$*
3. *Sei $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$ und $F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)dt$. Dann ist $F \in BV[a,b]$ und es gilt*

$$V_a^b F = \int_a^b |f(t)|dt.$$

Beweis. **1.:**
Nach dem vorherigen Satz reicht es zu zeigen, dass Indikatorfunktionen in $\mathrm{BV}[a,b]$ sind. Für diese gilt:

$$V_a^b(\mathbf{1}_{[c,d]}) \leq 2.$$

2.:
Für eine Zerlegung $\{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a,b]$ gilt für eine monoton (o.B.d.A. wachsende) Funktion f:

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)-f(x_{k-1}) = f(b)-f(a) < \infty$$

3.1: $V_a^b F \leq \int_a^b |f|dt$:

$$\sum_{k=1}^{n}|F(x_k)-F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt$$

3.2: Gleichheit für $f \in C^0[a,b]$:

Sei $f \in C^0[a,b]$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} |F(x_k) - F(x_{k-1})| \overset{\text{Mittelwertsatz}}{=} \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})|$$

Für $|x_j - x_{j-1}| \to 0$:

$$\to \int_a^b |f(x)| dx$$

3.3: Gleichheit im Allgemeinen:
Sei nun $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$: Für jedes $\epsilon > 0$ wählen wir ein $g \in C^0[a,b]$ mit

$$\|f - g\|_{L^1} < \epsilon/2.$$

Dies funktioniert, da $C^0[a,b]$ dicht in $\mathcal{L}^1[a,b]$ ist. Sei nun $G(x) := \int_a^x g(t)dt$.

$$\left| V_a^b F - \int_a^b |f| dt \right| \overset{\pm V_a^b G \text{ und } \Delta}{\leq} \left| V_a^b F - V_a^b G \right| + |\|g\|_{L^1} - \|f\|_{L^1}|$$

Dann folgt mit der inversen Dreiecksungleichung:

$$\leq V_a^b(F - G) + \|g - f\|_{L^1} \overset{3.1}{\leq} \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx + \epsilon/2 = \epsilon$$

□

Beweis. **Polynome sind auf** $[0,1]$ **v.b.V.**
Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Dann ist $p \in BV[a,b]$ und

$$V_0^1(p) = \int_0^1 |p'(x) dx| \leq 1 \cdot \|p'\|_\infty < \infty$$

$x \sin(\frac{1}{x})$ **ist auf** $[0,1]$ **nicht v.b.V.**

$$V_0^1(f) \geq V(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k\pi - \frac{\pi}{2}}$$

□

Übung. *Für welche $a, b \in \mathbb{R}_+$ ist $x^a \sin(x^{-b}) \in BV[0,1]$?*

Satz 4. *Sei $f \in BV[a,b]$ und $a < c < b$. Dann sind $f|_{[a,c]}, f|_{[c,b]}$ von beschränkter Variation und*

$$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$$

Beweis. Sei $Z := (x_k)_{k=0}^n$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und o.B.d.A. $c = x_r \in Z$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{r} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=r+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq V_a^c f + V_c^b f$$

Ebenso existieren Zerlegungen $Z_1 \coloneqq (x_k)_{k=0}^{n_1}$ von $[a,c]$ und $Z_2 \coloneqq (y_k)_{k=0}^{n_2}$ von $[c,b]$ s.d.:

$$\sum_{k=1}^{n_1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| > V_a^c f - \epsilon/2$$

und

$$\sum_{k=1}^{n_2} |f(y_k) - f(y_{k-1})| > V_c^b f - \epsilon/2$$

Daher gilt dann für $Z \coloneqq Z_1 \cup Z_2$

$$\sum_{k=1}^{n_1+n_2} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \geq V_a^c f + V_c^b f - \epsilon \implies V_a^b f \geq V_a^c f + V_c^b f$$

Insb. folgt, dass $V_a^c f, V_c^b f$ endlich sind. □

Satz 5. *Sei $f \in BV[a,b]$ und $V(x) \coloneqq \begin{cases} 0 & x = a \\ V_a^x f & a < x \leq b \end{cases}$.*
Ist f (links-, rechts-) stetig in x^*, so auch V.

Beweis. Sei δ s.d. $x^* - x < \delta \implies |f(x^*) - f(x)| \leq \epsilon/2$. Für eine Zerlegung $Z \coloneqq (x_k)_{k=0}^n$ s.d. $x_k - x_{k-1} < \delta$ und

$$V_a^{x*}(f) - \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \epsilon/2$$

gilt:

$$V_a^{x^*} f - \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \epsilon \implies V(x^*) - V(x_{n-1}) < \epsilon$$

Den Fall $x^* < x$ beweist man analog und die Aussage folgt. □

Satz 6. *Genau dann ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ v.b.V. wenn es monotone Funktionen $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt s.d.*

$$f = f_1 - f_2.$$

Ist f stetig, so können auch f_1, f_2 stetig gewählt werden.

Beweis. $\implies$**:**
Sei $f \in \mathrm{BV}[a,b]$ und $f_1(x) \coloneqq V_a^x f$. Dann ist f_1 monoton, denn für $x_1 < x_2$ gilt:

$$V_a^b(f) = V_a^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f) + V_{x_2}^b(f)$$

$$\implies f_1(x_1) = V_a^{x_1}(f) \leq V_a^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f) = V_a^{x_2}(f) = f_1(x_2)$$

Sei nun $f_2 \coloneqq f_1 - f$:

$$f_2(x_2) - f_2(x_1) = f_1(x_2) - f(x_2) - f_1(x_1) + f(x_1) \geq 0,$$

da

$$\underbrace{V_a^{x_1}(f)}_{=f_1(x_1)} + f(x_2) - f(x_1) \leq V_a^{x_1}(f) + |f(x_2) - f(x_1)| \leq \underbrace{V_a^{x_2}(f)}_{=f_1(x_2)}$$

D.h. f, g sind monotone Funktionen und per Definition gilt $f_1 - f_2 = f_1 - (f_1 - f) = f$.
$\Longleftarrow$**:**
Seien o.B.d.A. f_1, f_2 monoton wachsend. Nach Satz 3 sind sie dann auch v.b.V. und daher nach Satz 2 auch $f_1 - f_2 = f$.
Die Stetigkeitsaussage folgt aus Satz 5. $\square$

Satz 7. *Funktionen von beschränkter Variation sind integrierbar und fast überall differenzierbar.*

Beweis. Nach Satz 6 lassen sich solche Funktionen als Differenz zweier monotoner Funktionen darstellen. Diese sind auf $[a, b]$ integrierbar und nach Lebesgue f.ü. differenzierbar. $\square$

Satz 8 (Fatou)**.** *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer Funktionen, welche auf einer Menge A μ-integrierbar sind und zusätzlich*

$$\int_A f_n(x)d\mu \leq M$$

erfüllen. Wenn diese Funktionen f.ü. gegen eine Funktion f konvergieren, so ist auch f μ-integrierbar auf A und

$$\int_A f(x)d\mu \leq M$$

Beweis. Beweis in [KF70] im Kapitel Integration (Unterkapitel Further properties of the Lebesgue integral (Theorem 3)). $\square$

Satz 9. *Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Dann ist $F' \in \mathcal{L}^1[a, b]$ und es gilt*

$$\int_a^b F'(t)dt \leq F(b) - F(a)$$

Beweis. Sei

$$\Phi_n(t) := n\left(F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t)\right)$$

dabei erweitern wir F s.d. für $b + 1 \geq t > b : F(t) = F(b)$. Per Definition gilt dann

$$F'(t) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) \text{ f.ü. auf } [a, b].$$

Da $F \in \mathcal{L}^1[a, b]$ ist auch Φ_n integrierbar, dann folgt:

$$\int_a^b \Phi_n(t)dt = n\int_a^b \left(F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t)\right)dt = n\left(\int_{a+\frac{1}{b}}^{b+\frac{1}{n}} F(t)dt - \int_a^b F(t)dt\right)$$

Da F monoton wachsend ist und für $t > b : F(t) = F(b)$ folgt:

$$= n\left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(t)dt - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t)dt\right) \leq F(b) - F(a).$$

Die Aussage folgt dann aus Satz 8. $\square$

Beispiel (Cantorsche singuläre Funktionen: "Devil's staircase")**.** *Sei* $C_0 = [0,1], C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ *und sei* C_n *durch* C_{n-1} *so definiert, dass man für jedes Intervall von* C_{n-1} *das mittlere Drittel entfernt. Dann ist* $C = \bigcap_{n\geq 0} C_n$ *die Cantormenge und wir bemerken, dass die Länge der Intervalle von* C_n $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *ist. Sei dann*

$$f_n(x) \coloneqq \int_0^x \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{C_n}(t)dt.$$

Man sieht, dass für alle $n \in \mathbb{N} : f_n(0) = 0$ *und* $f_n(1) = 1$ *gilt. Des Weiteren sind die* f_n *stetig, konstant auf* $[0,1] \setminus C_n$ *und affin auf* C_n *mit einer Steigung von* $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *und daher insb. monoton wachsend. Sei* I *eines der Intervalle von* C_n*. Dann ist*

$$\int_I \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{C_n}(t)dt = \int_I \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \cdot \mathbb{1}_{C_{n+1}}(t)dt = 2^{-n}.$$

Daher gilt $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ *für* $x \notin C_n$*. Da* C *abgeschlossen ist gibt es für* $x \notin C$ *ein offenes Intervall in* $C^c = \bigcup_{n\geq 0} C_n^c$*. Insb. gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$ *s.d. für alle* $n \geq N$ $x \in C_n^c$ *und* $f_n(x) = f_N(x)$*. Die Folge konvergiert also punktweise auf* C^c*.*
Außerdem gilt für b *ein Endpunkt einer der Intervalle von* C_n*:*

$$\int_0^b \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{C_n}(t)dt = \int_0^b \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \cdot \mathbb{1}_{C_{n+1}}(t)dt.$$

Sei $I = [a,b] \ni x$ *wieder ein Intervall in* C_n*. Dann folgt:*

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{C_n}(t) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \cdot \mathbb{1}_{C_{n+1}}(t)dt \right| = \left| \int_a^x \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{C_n}(t) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \cdot \mathbb{1}_{C_{n+1}}(t)dt \right|$$

$$\leq \int_a^x \left| \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{C_n}(t) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \cdot \mathbb{1}_{C_{n+1}}(t) \right| dt \leq \int_a^b \left| \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{C_n}(t) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \cdot \mathbb{1}_{C_{n+1}}(t) \right| dt$$

Nun ist für t *aus dem ersten oder dritten Drittel von* $[a,b]$

$$\left| \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{C_n}(t) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \cdot \mathbb{1}_{C_{n+1}}(t) \right| = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

und für t *aus dem zweiten Drittel*

$$\left| \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{C_n}(t) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \cdot \mathbb{1}_{C_{n+1}}(t) \right| = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Die Differenz auf dem Intervall (von Länge 3^{-n}*) kann also gegen* $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ *abgeschätzt werden und daher können wir das obige Integral durch* $3^{-n}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ *abschätzen. Es folgt für* $x \in C_n$*:*

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq \frac{3}{2} \cdot 2^{-n} < 2^{-n+1}$$

Insb. gilt diese Abschätzung dann für alle $x \in [0,1]$ *und* f_n *ist cauchy.*
Wir wissen also Folgendes über f*:*

- $f_n \overset{glm.}{\to} f$

- *f ist stetig*
- $\forall x \in C^c : f'(x) = 0$ *und C ist eine Nullmenge bzgl. Lebesgue.*
- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$

Insb. zeigt f also, dass im vorherigen Satz im Allgemeinen keine Gleichheit gilt!

Vorbereitung für den nächsten Vortrag

Satz 10. *Sei X ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt eine abzählbare dichte Teilmenge $A \subset X$.*
2. *Es gibt abzählbar viele offene Teilmengen $U_n \subset X$ s.d. für $V \subset X$ offen und $x \in V$, ein n mit $x \in U_n \subset V$ existiert.*

Beweis. $1 \implies 2$:
Wähle $U_{a,k} := B_a(\frac{1}{k})$ für $k \in \mathbb{N}$ und $a \in A$.
$2 \implies 1$:
Wähle für $n \in \mathbb{N}$ ein bel. $a \in U_n$ und damit $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. □

Definition 11. *Wenn ein metrischer Raum X eine der äquivalenten Bedingungen erfüllt, so heißt X* ***seperabel****. Manchmal werden auch die Formulierungen*

- *X* ***hat eine abzählbare Basis der Topologie*** *($(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$)*
- *X* ***erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom***

benutzt.

Beispiel. *Beispiele für seperable Räume sind:*

- $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}^n$
- $L^1(\mathbb{R})$

Satz 12. *Sei X ein seperabler metrischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist auch Y seperabel.*

Beweis. Seien $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Basis aus der zweiten Bedingung. Dann ist die Menge der $V_n := U_n \cap Y$ eine Basis von Y. □

Definition 13. *Ein metrischer Raum X heißt Lindelöf-Raum, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.*

Bemerkung. *Jeder überdeckungskompakte Raum ist ein Lindelöf-Raum.*

Satz 14. *Jeder seperable metrische Raum ist ein Lindelöf-Raum.*

Beweis. Sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder die Basis der Topologie von X und $(V_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung. Sei $A := \{n \in \mathbb{N} | \exists i_n \in I : U_n \subset V_{i_n}\}$. Dann ist $(V_{i_n})_{n\in A}$ eine abzählbare Teilüberdeckung, da es für $x \in X$ ein $k \in I$ mit $x \in V_k$ geben muss. Da V_k offen ist, muss es dann auch ein U_l mit

$$x \in U_l \subset V_k$$

geben. Doch dann ist $l \in A$ und damit $U_l \subset V_{i_l} \implies x \in V_{i_l}$. Damit wurde eine abzählbare Überdeckung gefunden. $\square$

Bemerkung. *Damit ist also jede Teilmenge $Y \subset \mathbb{R}^n$ als metrischer Raum seperabel und ein Lindelöf-Raum.*

Bemerkung. *Die Struktur dieses Vortrags basiert auf [Les03]. Die Beweise stammen aus [Les03], [KF70] und [Kem] (Beweis und Konstruktion: Devil's staircase), wurden jedoch teilweise etwas ausführlicher aufgeschrieben. Für einen kurzen und anschaulichen Beweis der Übung verweise ich auf [zha].*

Literatur

[Kem] Kemp, Todd: *The Devil's Staircase*

[KF70] Kolmogorov, A. N. ; Fomin, S. V.: *Introductory real analysis.* 1970

[Les03] Lesch, M.: *Seminar zur Analysis, die Lebesgueschen Differentationssätze.* 2003

[zha] zhang, jy (https://math.stackexchange.com/users/1047477/jy-zhang): *When is $F(x) = x^a \sin(x^{-b})$ with $F(0) = 0$ of bounded variation on $[0, 1]$?* Mathematics Stack Exchange. `https://math.stackexchange.com/q/4426619`. – URL:https://math.stackexchange.com/q/4426619 (version: 2022-05-08)